Premis

Premi Ferran Sunyer i Balaguer

En l'acte de lliurament de premis de l'Intitut d'Estudis Catalans, el dia 24 d'abril de 2006, la Fundació Ferran Sunyer i Balaguer va atorgar el Premi Ferran Sunyer i Balaguer 2006 en la seva catorzena edició a Xiaonan Ma, del Centre de Matemàtiques Laurent Schwartz de l'Escola Politècnica (França), i George Marinescu, de l'Institut d'Anàlisi i Física Matemàtica de la J. W. Goethe Universität (Alemanya), per la monografia «Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels».

El llibre presenta una aproximació autocontinguda i unificadora, des de la perspectiva de la teoria de l'índex local, de les desigualtats de Morse holomorfes i les expansions asimptòtiques del nucli de Bergman.

Presentem a continuació dues recensions sobre els treballs guardonats en la convocatòria anterior. El Premi Ferran Sunyer i Balaguer 2005 va estar concedit *ex aequo* a les dues monografies «Perturbation methods and semilinear elliptic problems on $\mathbb{R}^n$», presentada per Antonio Ambrosetti i Andrea Malchiodi, ambdós professors de SISSA a Triestre, i «On the topology of isoleted singularities in analytic spaces», presentada per José Seade, professor de la Universitat Autònoma de Mèxic.

Per a saber més de la Fundació Ferran Sunyer i Balaguer visiteu el web http://ffsb.iec.cat/

Perturbation methods and semilinear elliptic problems on $\mathbb{R}^n$

A. Ambrosetti i A. Malchiodi

En la modelització matemàtica de nombrosos problemes provinents de la física, la geometria diferencial i altres camps, apareixen equacions en derivades parcials (EDP) el·líptiques semilineals a $\mathbb{R}^n$ amb estructura variacional. Un exemple important, tractat pels autors a la monografia, és l'equació

$$\begin{cases} -\Delta u + u = b(x)u^p, \\ u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n), u > 0, \end{cases}$$

on $u = u(x)$ és una funció de $x \in \mathbb{R}^n$, $1 < p \leq (n+2)/(n-2)$, Δ designa el laplacià i $W^{1,2}$ és un espai de Sobolev. Les solucions del problema són els punts crítics del funcional d'Euler o d'energia associat:

$$I_b(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \{|\nabla u|^2 + u^2\}dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^{p+1}dx.$$

Aquest funcional té un mínim local a $u \equiv 0$ i gaudeix de la geometria del lema del pas de la muntanya (important resultat obtingut el 1973 per A. Ambrosetti i P. H. Rabinowitz), però no satisfà en general la condició de compacitat de Palais-Smale a causa que el domini $\mathbb{R}^n$ no és fitat. Per a certes funcions $b = b(x)$, aquesta manca de compacitat es pot superar usant el mètode de concentració-compacitat de P. L. Lions, i obtenir així una solució de l'equació que correspon a un punt crític de tipus *mountain-pass* (en particular de tipus sella) del funcional I_b.

En la monografia els autors presenten i desenvolupen un mètode pertorbatiu molt general que permet una aproximació apropiada al problema anterior i a una llarga llista de problemes variacionals pertorbatius associats a equacions el·líptiques semilineals a $\mathbb{R}^n$. S'estudien funcionals pertorbats que, tot i tenir la geometria del lema del pas de la muntanya en alguns casos, no són susceptibles de l'aplicació directa del lema a causa principalment de la pèrdua de compacitat de l'encabiment de l'espai de Sobolev en l'espai de Lebesgue adequat. Els resultats dels autors així trobats estableixen l'existència (i a vegades la multiplicitat) de solucions i són complementaris dels obtinguts per altres autors usant el mètode de concentració-compacitat, en el sentit que s'apliquen per exemple a diferents classes de funcions b. Els resultats dels autors descrits a la monografia són sempre pertorbatius. Per exemple, s'estudia el problema descrit anteriorment quan $b(x) = b_\infty + \varepsilon h(x)$, on

$b_\infty = \lim_{x\to\infty} b(x)$ i, per tant, h tendeix a zero a l'infinit, i es donen resultats d'existència per ε prou petit. Fins i tot així, els teoremes obtinguts són d'una rellevància important donada la dificultat d'aquestes EDP el·líptiques. D'altra banda, un bon nombre de problemes el·líptics a $\mathbb{R}^n$ són pertorbatius de manera natural i, per tant, contenen un paràmetre de pertorbació natural. Com a exemples tractats al llibre d'aquest cas, citem els problemes de bifurcacions des de l'espectre essencial i els d'ones estacionàries per a l'equació de Schrödinger no lineal (on el paràmetre és la constant de Planck, que multiplica el laplacià).

Un problema geomètric important tractat a la monografia és el de curvatura escalar prescrita i, en particular, el famós problema de Yamabe. En una varietat riemanniana compacta (M, g) es vol trobar una nova mètrica $\tilde{g}$ conforme a g de manera que la curvatura escalar de $(M, \tilde{g})$ sigui una funció prescrita $b = b(x)$, $x \in M$. Si escrivim $\tilde{g} = u^{4/(n-2)}g$, el problema esdevé equivalent a resoldre una EDP molt similar a la presentada al començament, ara amb $p = (n+2)/(n-2)$ (l'exponent crític de Sobolev). Les contribucions dels autors en aquest camp són resultats de multiplicitat de solucions, així com de no-acotació uniforme de solucions per certes mètriques (resultat complementari al famós de R. Schoen sobre acotació uniforme de solucions).

El mètode general desenvolupat pels autors es basa en el mètode de Liapunov-Schmidt (i, per tant, essencialment en el teorema de la funció implícita) combinat astutament amb un mètode variacional de minimització (aprofitant l'estructura variacional de l'EDP) emprat per a resoldre l'equació de bifurcació en dimensió finita. Aquesta eina variacional fa que l'equació de bifurcació es pugui resoldre fins i tot en casos degenerats (per exemple, casos de mínims degenerats). A continuació descrivim amb més detall el mètode general.

Es vol resoldre l'equació $I'_\varepsilon(u) = 0$ (on $'$ denota la diferencial) satisfeta pels punts crítics del funcional I_ε. Els funcionals són de la forma $I_\varepsilon(u) = I_0(u) + \varepsilon G(u)$ o, més generalment, $I_\varepsilon(u) = I_0(u) + G(\varepsilon, u)$. Donat H un espai de Hilbert, $I_0 \in C^2(H, \mathbb{R})$ és el funcional no pertorbat i $G \in C^2(H, \mathbb{R})$ és la pertorbació. Se suposa que existeix una varietat $\mathcal{Z}$ de punts crítics de I_0 de dimensió finita. Els casos que es tracten presenten varietats crítiques no compactes; per exemple, l'equació no pertorbada ($b \equiv b_\infty$ constant) descrita al començament és invariant per translacions, pel que $\mathcal{Z}$ conté una solució i tots els seus traslladats. Aquesta és la raó principal per no satisfer la condició de compacitat de Palais-Smale. Els autors estudien sota quines circumstàncies la pertorbació G fa possible recuperar la compacitat, i poder així trobar punts crítics de I_ε a prop de $\mathcal{Z}$.

Si en lloc d'una varietat crítica es tingués un punt crític aïllat no degenerat, es podria aplicar directament el teorema de la funció implícita per a trobar per a $|\varepsilon|$ petit una solució de $I'_\varepsilon(u) = 0$. La condició equivalent de varietat crítica no degenerada és que, per a tot $z \in \mathcal{Z}$, es satisfaci $T_z\mathcal{Z} = \ker I''_0(z)$ i $I''_0(z)$ sigui una aplicació de Fredholm d'índex 0.

Es considera l'equació $I'_\varepsilon(u) = 0$ com un problema de bifurcació i s'usa el procediment de Lyapunov-Schmidt per tal de reduir el problema a l'estudi de dues equacions, una equació auxiliar a l'espai (de dimensió infinita) ortogonal al tangent $T_z\mathcal{Z}$ i una equació de bifurcació en dimensió finita. És a dir, es busquen punts crítics de I_ε de la forma $u = z + w$, amb $z \in \mathcal{Z}$ i $w \in W = (T_z\mathcal{Z})^\perp$. Aleshores l'equació $I'_\varepsilon(z+w) = 0$ equival al sistema

$$\begin{cases} PI'_\varepsilon(z+w) = 0 \\ \qquad \text{(equació auxiliar, en dimensió infinita)} \\ (Id - P)I'_\varepsilon(z+w) = 0 \\ \qquad \text{(equació de bifurcació, en dimensió finita).} \end{cases}$$

on $P\colon H \to W$ denota la projecció ortogonal sobre W. L'equació auxiliar es pot resoldre aplicant el teorema de la funció implícita i s'obté existència i unicitat de solució $w = w_\varepsilon(z)$ per a tot subconjunt compacte $\mathcal{Z}_c$ de $\mathcal{Z}$ i ε prou petit.

Per a resoldre l'equació de bifurcació, i per tant obtenir les solucions de $I'_\varepsilon(u) = 0$ desitjades, el punt clau del mètode es basa en el resultat variacional següent dels autors. Sota condicions de no-degeneració de $\mathcal{Z}$ i donat un subconjunt compacte $\mathcal{Z}_c$ de $\mathcal{Z}$, $u_\varepsilon = z_\varepsilon + w_\varepsilon(z_\varepsilon)$ és un punt crític de $I_\varepsilon = I_0 + \varepsilon G$ si $z_\varepsilon \in \mathcal{Z}_c$ és un punt crític del funcional reduït $\phi_\varepsilon\colon \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$, $\phi_\varepsilon(z) = I_\varepsilon(z + w_\varepsilon(z))$. Recordem que aquí w_ε és la funció implícita provinent de la resolució de l'equació auxiliar. Per a resoldre el problema

resta, per tant, trobar punts crítics del funcional reduït ϕ_ε. Per això convé fer l'expansió de ϕ_ε fins a primer ordre si és no degenerat i fins a ordres majors si $G'(z) = 0$. Un altre camí és el coneixement del comportament asimptòtic de $\phi_\varepsilon(z)$ a l'infinit que asseguri l'existència d'un punt crític (per exemple, un extrem) de ϕ_ε.

Destaquen en la monografia les nombroses aplicacions del mètode desenvolupat per A. Ambrosetti i A. Malchiodi a problemes variacionals provinents d'EDP amb orígens molt diferents, que són descrites en els capítols 3 a 10. Els capítols 1 i 2 contenen exemples importants i motivacions, així com el desenvolupament del mètode abstracte descrit anteriorment.

En el capítol 3 trobem aplicacions a famílies de solucions que bifurquen a partir de l'ínfim de l'espectre essencial. Presenten l'exemple d'un problema d'òptica no lineal, relacionat amb la propagació de la llum en un medi amb funció dielèctrica $f(x, u)$.

El capítol 4 estudia problemes el·líptics a $\mathbb{R}^n$ amb creixement subcrític, com el presentat al començament, mentre que els capítols 5, 6 i 7 tracten les equacions ja mencionades de curvatura escalar prescrita, on l'exponent és el crític. Entre altres, s'estudia el famós problema de Yamabe que consisteix a trobar una mètrica conforme amb curvatura escalar R_0 constant en una varietat riemanniana (M, g), $n \geq 3$. Si u és una potència del factor conforme, el problema esdevé $-2c_n\Delta_g u + R_g u = R_0 u^{(n+2)/(n-2)}$, $u \geq 0$ a M, on Δ_g és l'operador de Laplace-Beltrami.

El capítol 8 tracta sobre ones estacionàries per a l'equació de Schrödinger no lineal, és a dir, $-\varepsilon^2\Delta u + V(x)u = u^p$ a $\mathbb{R}^n$, $u > 0$ i $p > 1$ subcrític. S'interessen pel límit semiclàssic en mecànica quàntica ($\varepsilon \to 0$) i proven l'existència de solucions que es concentren en punts singulars a $\mathbb{R}^n$ (*spike solutions*).

El capítol 9 estudia problemes de Neumann amb pertorbacions singulars en dominis acotats de $\mathbb{R}^n$, és a dir, $-\varepsilon^2\Delta u + u = u^p$ a Ω, $\partial u/\partial\nu = 0$ a $\partial\Omega$, $u > 0$ i $p > 1$ subcrític, per als quals proven l'existència de solucions que es concentren quan $\varepsilon \to 0$ en punts de la frontera (*boundary spikes*). Finalment, el capítol 9 estudia solucions que es concentren en esferes per a problemes de Schrödinger no lineals i de Neumann amb pertorbació singular, en el cas radial.

La majoria dels capítols contenen al final comentaris bibliogràfics ben escollits sobre els temes tractats. La monografia «Perturbation methods and semilinear elliptic problems on $\mathbb{R}^n$» és un text molt ben escrit que serà d'una utilitat considerable com a referència en problemes el·líptics a tot l'espai i/o problemes amb perturbacions singulars.

Xavier Cabré (ICREA-UPC)
Neus Cónsul (UPC)

On the topology of isolated singularities in analytic spaces

José Seade

La topologia associada amb els punts singulars dels espais analítics ha merescut una atenció especial des dels treballs inicials de K. Brauner, el 1928, sobre els nusos associats a les singularitats de corbes planes, fins a l'actualitat, especialment, a partir de la monografia de J. Milnor «Singular points of complex hypersurfaces», de 1968.

Els dos resultats generals més significatius per a l'obra de J. Seade són el teorema d'estructura cònica local de les singularitats i el teorema de fibració de Milnor. Situem-nos en el cas estudiat pel mateix Milnor, el de les singularitats aïllades d'hipersuperfície: sigui $f\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ una funció polinòmica i

$$V = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid f(z_0, \ldots, z_n) = 0\}$$

la hipersuperfície de $\mathbb{C}^{n+1}$ associada, i sigui p un punt de V que és una singularitat aïllada. Si denotem per $S_\varepsilon, D_\varepsilon$ l'esfera i el disc de radi ε centrats en p, aquests resultats són:

a. *Estructura cònica de les singularitats*: per a tot ε prou petit, $K = V \cap S_\varepsilon$ és una varietat diferenciable, anomenada el *link* de V. El parell $(D_\varepsilon, V \cap D_\varepsilon)$ és homeomorf al pa-

rell (CS_ε, CK), on CX indica el con de X de vèrtex p.

b. *Teorema de fibració de Milnor*: l'aplicació

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} \colon S_\varepsilon - K \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

és una fibració localment trivial, anomenada la *fibració de Milnor* de la singularitat.

Es plantegen de manera natural diverses qüestions, entre les quals, quines varietats diferencials són *link* K d'una singularitat aïllada, quina relació hi ha, si és el cas, entre els invariants topològics de K i els invariants analítics de la singularitat; o, pel que respecte a la fibració de Milnor: quin és el tipus topològic de la fibra F_θ de ϕ, quina és la monodromia de la fibració. Es coneixen diversos resultats generals, com ara el tipus homotòpic de F_θ, el teorema de quasi-unipotència, etc. El llibre que estem comentant analitza aquestes i altres qüestions en diverses famílies d'exemples.

Un exemple paradigmàtic de singularitat aïllada és el de les *varietats de Pham-Brieskörn* $V(a_0, \ldots, a_n)$, definides per a enters $a_0, \ldots, a_n \geq 2$, per l'equació

$$z_0^{a_0} + \cdots + z_n^{a_n} = 0.$$

Així, per exemple, l'estudi de la monodromia de la fibració de Milnor de les varietats $V(2, \ldots, 2, 3)$ permet provar que, per a n senar, el *link* associat $K(2, \ldots, 2, 3)$ és homeomorf a una esfera de dimensió $2n-1$, tot i que l'estructura diferenciable no serà, en general, la usual de $\mathbb{S}^{2n-1}$. Apareixen, així, les estructures d'*esferes exòtiques* estudiades per Milnor i Kervaire.

Per a corbes planes, K és un enllaç (o un nus) i clàssicament s'ha estudiat la relació entre els invariants analítics de la singularitat i els invariants topològics de l'enllaç. Per a singularitats aïllades de superfícies de $\mathbb{C}^3$, el *link* K és una varietat diferenciable de dimensió 3. Un exemple de singularitat de superfície especialment estudiat en la literatura és el de les singularitats quocient que corresponen als espais d'òrbites de l'acció d'un grup finit G sobre $\mathbb{C}^2$, $G\backslash\mathbb{C}^2$. En aquest cas, el *link* K és difeomorf al quocient $\mathbb{S}^3/G$ i, per tant, el seu recobridor universal, $\mathbb{S}^3 \cong SU(2)$, admet una estructura de grup de Lie.

En el primer capítol de la monografia l'autor presenta els teoremes d'estructura cònica i de fibració de Milnor citats anteriorment, així com alguns dels invariants associats, el número de Milnor μ i el polinomi característic de la monodromia de ϕ.

Els capítols 2 al 5 estan dedicats a l'estudi de la topologia del *link* K associat a les singularitats aïllades de certes famílies d'hipersuperfícies complexes. Més específicament, en els capítols 2 i 3 s'estudien per a quines singularitats aïllades de superfície el *link* K admet un recobridor universal amb estructura de grup de Lie. En el capítol 2 es presenta la classificació dels grups triangulars d'isometries de les geometries euclidiana, el·líptica i hiperbòlica, que donen tessel·lacions del pla en cadascun dels casos, i les singularitats quocient a què donen lloc. En particular, s'analitzen les singularitats quocient definides per superfícies de Pham-Brieskorn $V(p, q, r)$ amb $1/p + 1/q + 1/r > 1$, conegudes com a *singularitats de Klein*.

Les superfícies $V(p, q, r)$ amb $1/p + 1/q + 1/r \leqslant 1$ són el principal objecte d'estudi del capítol 3. L'autor basa la seva anàlisi en un teorema de classificació per a parells (G, Γ), on G és un grup de Lie simplement connex i Γ és un subgrup discret cocompacte, provat per Milnor. En el cas en què $\dim G = 3$, aquest teorema redueix a sis els casos possibles, casos que s'analitzen individualment, així com el tipus de singularitat de superfície a les quals estan associats.

En el capítol 4, l'autor fa una presentació general del teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch, que utilitza per a analitzar les possibles relacions entre els invariants analítics de V, o d'una resolució de singularitats $\widetilde{V}$ de V, i els invariants topològics de la fibra de Milnor. En particular, es mostra succintament com deduir diverses fórmules de Durfee, Laufer i Rochlin per a les singularitats de superfície.

El capítol 5 clou els temes centrats en les singularitats complexes. Es presenta una versió del teorema de Klein en dimensió superior per al cas particular de les quàdriques, i analitza l'acció del grup $SO(n+1, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}$.

Els tres darrers capítols estan dedicats a l'estudi de les singularitats aïllades analítiques *reals*. El mateix Milnor ja havia demostrat que en el cas real es dóna també l'estructura cònica de la singularitat i que es disposa

d'un teorema de fibració, tot i que en aquest cas la projecció ψ d'aquesta fibració no és necessàriament $f(x)/|f(x)|$. Milnor va plantejar la qüestió de trobar exemples no trivials de famílies de singularitats aïllades reals per a les quals $\psi(x) = f(x)/|f(x)|$. Diversos autors van provar l'existència d'aquestes famílies, però no es coneixen gaires exemples específics. En el capítol 6, Seade desenvolupa un mètode general per a construir singularitats analítiques reals a partir de camps vectorials holomorfs seguint els resultats de López de Medrano, Meersseman i Verjovsky.

Aquest mètode permet analitzar, en el capítol 7, les singularitats de Pham-Brieskörn *torçades*, definides per l'equació

$$\lambda_1 z_1^{a_1}\overline{z}_{\sigma_1} + \cdots + \lambda_n z_n^{a_n}\overline{z}_{\sigma_n} = 0,$$

on σ és una permutació de $\{1, \ldots, n\}$, per a les quals prova que la fibració de Milnor ve donada per $f(x)/|f(x)|$. Quan la permutació σ és la identitat, aquestes singularitats són topològicament equivalents a les singularitats de Pham-Brieskörn complexes. En l'últim capítol, s'estudia el cas més senzill no cobert per les singularitats complexes, el corresponent al polinomi

$$z_1^p\overline{z}_2 + z_2^q\overline{z}_1 = 0, \quad p, q > 1,$$

i es dóna una descripció completa de la monodromia de la seva fibració de Milnor.

L'estudi de les singularitats dels espais analítics és un punt de trobada de diverses àrees de les matemàtiques, com la geometria, l'àlgebra, la topologia o l'anàlisi. El llibre de José Seade no pretén donar un panorama complet de la topologia de les singularitats aïllades, sinó que se centra en aquelles qüestions que més han interessat l'autor i recullen algunes de les seves aportacions en aquest camp.

Com expressa el mateix autor, el llibre no té un desenvolupament sistemàtic; en certa manera, els capítols estan agrupats formant blocs independents, atenent als diversos problemes tractats. Seade ha fet un esforç, no sempre reeixit, per fer el text autocontingut; no tant en el sentit habitual del terme, sinó en l'organització que proposa a partir dels prolixos comentaris que fa de l'extensa relació bibliogràfica que acompanya el text.

Joaquim Puig, premi José Luis Rubio de Francia 2005

El Premi José Luis Rubio de Francia 2005 per a joves investigadors en matemàtiques ha estat atorgat a Joaquim Puig i Sadurní, del Departament de Matemàtica Aplicada I de la UPC.

Aquesta és la primera edició d'aquest premi, que ha estat instaurat per la Real Sociedad Española de Matemáticas en memòria de José Luis Rubio de Francia (1949-1988), gran analista matemàtic aragonès, mort prematurament als trenta-nou anys, per tal de premiar les contribucions matemàtiques de doctors de menys de trenta-dos anys, especialment en la seva tesi doctoral.

El Premi, dotat amb 3.000 euros, li va ésser atorgat durant la celebració del congrés MAT.ES2005, el primer congrés conjunt de les quatre societats matemàtiques RSME, SCM, SEIO i SEMA, durant el qual Joaquim Puig va impartir una conferència plenària titulada «El problema dels deu martinis».

Curiosament, aquest problema matemàtic no té res a veure amb martinis o altres begudes alcohòliques, sinó que conté en el seu títol el premi ofert per qui el va proposar. El problema matemàtic consisteix a caracteritzar l'estructura de l'espectre de l'operador Almost Mathieu definit sobre l'espai $l^2(\mathbb{Z})$ mitjançant

$$(H_{b,\omega,\phi}\, x)_n = x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos(2\pi\omega n + \phi)\, x_n,$$

on l'operador Almost Mathieu és l'operador discret de Schrödinger més conegut, i l'equació espectral associada,

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos(2\pi\omega n + \phi)\, x_n = a x_n$$

és sovint anomenada *equació de Harper*. El nom d'Almost Mathieu per a aquesta equació és perquè es pot considerar com l'anàleg discret de la coneguda l'equació de Mathieu

$$x'' + (a + b\cos t)x = 0.$$

L'operador Almost Mathieu va ésser introduït per Peierls i Harper l'any 1955 com un